부동산학연구 제18집 제3호, 2012. 9, pp. 5～21

Journal of the Korea Real Estate Analysts Association
Vol.18, No.3, 2012. 9, pp. 5～21

옵션가치평가 방법을 이용한 전세가격*

Chonsei Pricing with Option Pricing Method

배 광 일 (Bae, Kwangil)**

< Abstract >

Lee, Chung, and Lee (2002) show that conversion rate of Chonsei to monthly rent is related to the required rate of return of equity invested in housing. After that, studies on Chonsei have focused on the leverage effect and risk of owners' point of view. This paper insists that Chonsei price is related to risk of tenant as well as risk of owner. In fact, Chonsei contract is similar to the debt contract, especially par bond. To adopt this feature and the risk of tenant, we use option pricing method. As a result, we could show that Chonsei price depends on existence of senior loan that is general wisdom of Chonsei contract. In addition, we could prove that the model is consistent to the empirical evidences; Chonsei price depends on interest rate or the volatility of house price, and conversion rate of Chonsei to monthly rent is positively correlated to the amount of security deposit.

주 제 어 : 전세, 옵션, 전월세전환률, 대출, 액면채
Keywords : Chonsei, Option, Conversion Rate of Chonsei to Monthly Rent, Loan, Par Bond

---

* 전남대학교 경영대학 학술집담회에서 유익한 조언을 해주신 참여교수님들께 감사드립니다. 또한 심사를 맡아주시고, 논문의 발전을 위해 유익한 조언을 해주신 익명의 세 심사위원님들께 깊은 감사를 드립니다. 남아있는 논문의 오류에 대한 모든 책임은 저자에게 있습니다.

** 전남대학교 경영학부 조교수, k.bae@jnu.ac.kr

I. 서론

최근 전세품귀현상과 함께 전세가격이 상승하여 이슈가 되고 있다. 대부분의 신문매체에서는 전세가격의 상승이 수요의 증가와 공급의 부족에 의한 것으로 해석하고 있다. 그러나 학계에서는 수요 공급의 원리 이외에도 전세가격에 대한 여러 연구가 이루어져왔다.

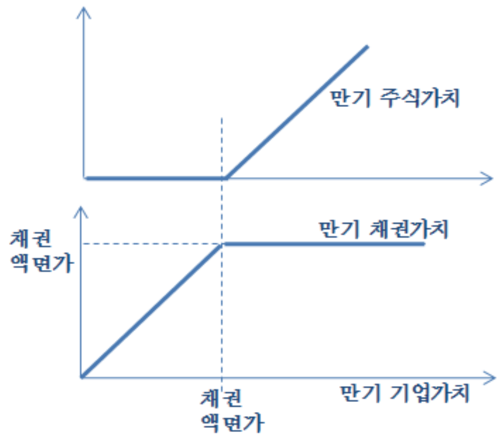
전통적으로는, 임대인이 전세금을 예금 및 국채에 투자했을 때 나오는 이자와 월세와 동등해지도록 전세금이 결정된다고 이해했다. 이에 따라, ‘월세/(전세금-월세보증금)’ 비율이 전월세 전환률이라 불리며 국채수익률에 비교되어왔다. 예로, Hwang, Quigley, and Son (2006)의 경우, 2년 만기 국채에 전세금을 투자했을 때 나오는 수익이 임대 수익을 대체할 수 있다고 가정한다.

그러나 일반적으로 전월세 전환률이 예・적금 금리 및 국채수익률에 비해 높았기 때문에 일종의 이상 현상으로 여겨졌다. 이때, 김종일・송의영・이후헌 (1998) 및 이창무・정의철・이현석(2002)은 전세를 안고 주택을 구매하는 것과 주택 구매자가 대출을 받고 주택을 구매하는 것이 유사하다는 점에 주목한다. 결국, 이창무・정의철・이현석(2002)은 전월세 전환률을 자기자본에 대한 기대수익률로 해석할 수 있기 때문에, 주택가격 변동과 관련된 위험프리미엄을 감안하면 전월세 전환률이 이자율을 초과하는 현상이 충분히 합리적임을 보여주었다.

이후 최창규・지규현(2007), 임재만(2011)은 이창무・정의철・이현석(2002)의 모형에서 다른 대출이나 임차인의 관점을 추가로 고려하여 임차인의 자산제약을 중심으로 구조적 해석을 했다. 그 결과 차입이 원활한 임대인은 전세보다 월세를 선호하고, 임차인은 자신의 자산이 충분히 축적되었을 경우 전세를 선호한다는 것을 확인했다. 이처럼 임차인의 관점에서 살펴본 논문들은 대체로 임차인의 위험을 고려하기보다는 금리와 전월세전환률의 크기비교에 초점을 맞추고 있다. 그러나 이창무・최소의・제민혜(2010)의 경우 임차인의 관점에서도 위험 프리미엄이 중요한 요소가 될 수 있음을 설문조사를 통해 보여준다.

본 논문은 전세입주가 회사에서 발행한 채권을 구매한 것과 비슷하다는 점에 주목하고, 전세가격을 살펴보고자 한다. 전세거래가 채권거래로 해석될 수 있는 이유는 다음과 같다. 첫째, 임차인은 화폐로 받는 이자는 없지만 임대료 없이 집에 거주할 수 있다. 즉, 매달 월세만큼의 이자를 받는 것으로 볼 수 있다. 둘째, 만기에 받는 전세금은 채권의 원금을 받는 것으로 볼 수 있다. 이에 따라, 전세거래를 채권거래로 해석하는 데에는 큰 무리가 없을 것이다.

〈그림 1〉 만기의 기업가치에 따른 채권 및 주식의 가치



채권 가격을 결정하는 대표적인 방법은 옵션(option)가치평가를 이용하는 것이다. <그림1>에

서 볼 수 있듯이, 채권 만기일에 기업가치가 미리 발행한 채권 원금보다 높다면 이를 모두 갚고 남은 가치가 주주들의 것이 될 것이고, 기업가치가 원금보다 낮아진다면 그 기업가치만 채권자에게 돌려줄 것이다. 이 같은 주식의 미래가치 구조는 특정 시점에 특정 자산을 미리 약속된 가격에 살 수 있는 권리를 갖는 콜옵션(call option)의 미래가치 구조와 동일하다. 이러한 성질을 바탕으로, Black and Sholes (1973) 및 Merton (1973)은 주가에 대한 공식을 제시했다. 채권가치는 기업가치에서 주식가치를 차감한 것과 같으므로, 이 식을 이용하면 결국 채권의 가치를 계산할 수 있게 된다.

기업 가치에만 근거하는 주식 및 채권과는 달리, 전세금은 임대인의 다른 자산을 통해서도 갚아야한다. 그러나 주택 이외에 다른 자산이 거의 없는 임대인의 경우, 주택가격이 하락하면 전세금을 돌려주지 못할 가능성이 존재하므로 주식과 같이 이해할 수 있다. 또한, 임대인의 다른 재산 유무에 대해 임대인, 임차인 사이의 정보 비대칭을 고려한다면, 적어도 최악의 경우를 대비해야 하는 임차인 입장에서는 옵션이론을 고려하는 것이 합당화 될 수 있을 것이다.

이처럼 옵션가치평가방법은, 임대인의 투자 위험뿐만 아니라 임차인이 전세금 및 보증금을 돌려받지 못할 위험이 고려된다는 점에서 기존의 구조적 모형을 보완할 수 있다. 김선웅(2000) 및 Ambrose and Kim (2003) 역시 옵션이론을 이용하여 전세가격이 만족해야 하는 식을 도출한 바 있다. 이때, 전세가격은 음함수로 표현되기 때문에 그들은 변동성 및 이자율이 전세가격에 미치는 효과를 수치적 해법으로 살펴보는데 그쳤지만 이는 실증분석 결과와 일치했다.

본 연구의 모형은 Ambrose and Kim (2003)과 유사하다. 그러나 우리는 부도효과자체에 충실하기 위해, 그들처럼 경매까지 소요 시간을 감안하는 대신 선순위대출 및 보증부 월세의 효과를 포함했다. 이 모형 아래에서 우리는 현존하는 실증분석결과들이 이론적으로 합당함을 증명한다. 즉, Ambrose and Kim (2003)의 실증분석에 부합하게 주택 매매가 변동성 및 이자율이 전세가격과 부의관계가 있음을 증명하고, 이재우 · 이창무(2005) 및 지규현 · 최창규(2010)의 실증분석과 부합하게, 보증금과 전월세 전환률의 상관계수가 양수임을 증명한다. 이미 이재우 · 이창무(2005)에서 전월세전환률의 효과를 이론적으로 보여준바 있지만, 그들은 이를 위해서 임대인의 위험프리미엄이 보증금 규모에 선형으로 증가함을 가정했다. 이는 레버리지가 클수록 위험프리미엄이 커진다는 점에서 정당화 되지만, 본 연구에서는 이와 같은 가정 없이 내생적으로도 보일 수 있었다. 또한, 근저당의 규모가 클수록 전세가격이 감소함을 증명함으로써, 근저당이 있는 집의 전세거래는 유의하라는 통상적인 말이 의미가 있음을 보인다.

이 같은 분석을 위한 본 논문의 구성은 다음과 같다. 2장 초반에 모형을 가정하고 2장 1절에서는 단순하게 기존 대출이 없을 때 전세가격을 살펴본다. 이를 확장하여 2절에서 선순위 대출이 있을 때 전세가격을, 3절에서는 보증부 월세 계약시에 보증금에 대한 성질을 살펴본다. 마지막으로 3장에서는 결론을 제시한다.

II. 모형 및 전월세 가격

주택은 그 자체로 소비자산이지만, 보유 편익

을 월세 금액으로 환산할 수 있다는 점에서, 투자자산으로 이해할 수 있다. 즉, 보증금 없는 월세 계약에서 t시점에 받게 될 임대료의 크기를 d_t로, 미래 현금흐름의 현재가치를 나타내는 함수를 $PV(.)$로 두면, 현재의 주택 가격 V_0와 미래 임대료 사이에는 다음과 같은 관계식이 성립한다.

$$V_0 = \sum_{t<\infty} PV(d_t)$$

이를 바꾸어 표현하면, 현재 주택가격은 앞으로 T시점까지 받게 될 임대료의 현재가치와, T시점 주택가격의 현재가치의 합으로 나타낼 수 있고, 이를 다음과 같은 식으로 표현할 수 있다.

$$V_0 = \sum_{t<T} PV(d_t) + PV(V_T) \qquad (1)$$

이제 주택가격의 변동에 대해 살펴보자. t와 t+1시점 사이의 1년간 임대료가 t시점 주택가격에 비례하는 δV_t로 발생하고, 주택가격 증가분 및 임대료를 통해 얻을 수 있는 연간수익률이 평균 μ, 표준편차 σ의 정규분포를 따른다면, 표준정규분포를 따르는 확률변수 ϵ_{t+1}에 대해 다음과 같은 식이 성립한다.

$$\frac{V_{t+1} - V_t + \delta V_t}{V_t} = \mu + \sigma\epsilon_{t+1}$$

우리는, 시점들 사이를 더 세분화하여, 연간수익률이 아닌 매 순간 수익률에 대해서 이와 같이 나타낼 수 있다고 가정하고자 한다. 또한, 각 시점별 수익률들이 서로 독립이라고 가정하면, 주택가격의 변화는 다음과 같은 기하 브라운 운동(Geometric Brownian Motion)으로 표현된다.

$$\frac{dV_t + \delta V_t dt}{V_t} = \mu dt + \sigma dw_t$$

무위험 자산의 수익률이 r일 때 위 운동은, 위험중립확률(risk neutral probability)하에서, 주택가격 기대상승률 μ와는 무관하게 다음과 같이 표현된다.1)

$$dV_t = (r-\delta)V_t dt + \sigma V_t dw_t \qquad (2)$$

이 경우 임대료는 매순간 $\delta V_t dt$가 발생한다. 이와 같은 연속적인 표현아래에서 식 (1)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$V_0 = \int_0^T PV(\delta V_t dt) + PV(V_T) \qquad (1^*)$$

한편, 브라운운동의 성질을 이용하면 $e^{-rT}E[V_T] = V_0 e^{-\delta T}$를 도출할 수 있고, 식 (1*)과 이를 이용하여 T시점 주택가격의 현재가치 및 T시점까지 임대료의 현재가치를 다음과 같이 나타낼 수 있다.2)

1) 이후로 본 논문의 확률은 모두 위험중립확률을 이용한다. 이 가정은 투자자들의 위험성향과 무관하다. 다시 말해서, 투자자들이 위험중립임을 가정한 것과는 다르다. Hull(2011)은 위험중립확률, 기하 브라운운동, 및 옵션 가치 평가에 대해 자세히 다루고 있다.

2) $e^{-rT}E[V_T] = V_0 e^{-\delta T}$는 식(2)에서 $e^{-(r-\delta)T}V_t$가 마팅게일(martingale)임을 이용하여 도출되었다. 위험중립확률을 이용하면, 자산가치는 미래 현금흐름의 기대값을 무위험이자율로 할인함으로써 계산할 수 있다.

$$PV(V_T) = e^{-rT}E[V_T] = e^{-\delta T}V_0 \quad (3a)$$

$$\int_0^T PV(\delta V_t dt) = \int_0^T e^{-rt}E[\delta V_t]dt \quad (3b)$$
$$= (1 - e^{-\delta T})V_0$$

앞선 가정들중에서, 임대비용이 매매가에 일정하게 연속적으로 발생한다는 점은 현실적으로 받아들이기 어렵다. 그러나 본 논문에서 우리가 다루고자하는 부분은 전세 만기 T시점까지의 임대비용과 연관이 있다. 따라서 δ가 식(1*)의 연속적 현금흐름의 가정에서 비롯되었을지라도, 식(1)의 이산적 현금흐름 기준인

$$\delta = -\frac{1}{T}ln\left(1 - \frac{1}{V_0}\sum_{t<T} PV(d_t)\right)$$

를 만족하는 값으로 간주하면 큰 무리가 없을 것으로 보인다. 추가로, 세금, 경매로 인한 가치손실, 경매까지 기다리는 시간 그리고 거래비용이 없다고 가정하자.

1. 근저당 없는 주택의 전세가격

먼저, 주택에 근저당이 없을 경우 전세가격의 형성 원리를 살펴보자. 전세 임차인은 처음에 일정 금액을 지불하고 약정기간동안 거주한 뒤 약정 시점(2년 뒤)에 동일한 금액을 돌려받을 수 있게 된다. 약정기간동안 두 당사자는 금전적 교환이 없지만, 앞서 논의한 것처럼 전세 임차인은 거주함으로써 임대료만큼의 편의를 제공받고, 만기에 원금을 돌려받게 된다. 즉, 임차인은 일종의 이표채(coupon bond)를 구매한 것으로 여길 수 있다. 또한, 임차인은 전세금을 돌려받지 못할 가능성이 있으므로 이 채권은 부도가능 채권(defaultable bond)으로 여길 수 있다. 이에 더해, 전세거래는 초기 지불 금액 및 만기 환급액이 같다는 점에서, 일종의 액면가 채권(par bond)의 거래로 간주할 수 있다.

일반적으로 회사채는 부도위험성이 있고, 초기가격과 만기 원금이 같다는 점에서 전세거래와 거의 같은 성격을 가진다. 단, 회사채는 액면가가 먼저 결정되고 이자율이 결정되지만, 전세거래에서는 거주기간동안 생기는 편익(임대료)을 토대로 전세가격이 결정된다는 점에서 서로 다른 성질을 찾을 수 있다. 전세를 안고 집을 산 임대인 관점에서 살펴보면, 현재 주택가격과 전세가격의 차액만 지불하고도 만기에 전세가격으로 주택을 살 수 있는 콜옵션을 소유한다고 볼 수 있다. 다시 말해, 전세금을 B_0^J로 나타낼 때, 초기

$$V_0 - B_0^J$$

를 지불하고, 미래에

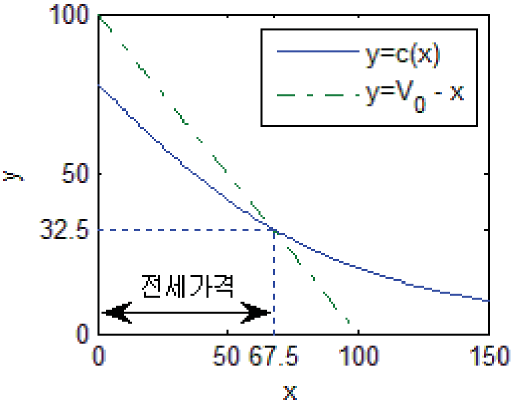
$$\max(V_T - B_0^J, 0)$$

를 얻는 것으로 간주할 수 있다.

이때, 초기비용과 미래 환급액의 현재가치가 동일해야하므로, 다음식이 성립한다.

$$V_0 - B_0^J = e^{-rT}E[\max(V_T - B_0^J, 0)] \quad (4)$$

〈그림 2〉 전세가격 결정구조



주: 이 그림의 모수는 주택가격 $V_0=100$, 임대료 비율 $\delta=5\%$, 무위험 이자율 $r=5\%$, 전세 만기 $T=5$, 주택가격 변동성 $\sigma=30\%$를 가정했다. 참고로, 그래프의 교점을 뚜렷하게 보이기 위해 만기 5년을 이용했다. 만기 2년을 이용하더라도 같은 원리로 하나의 교점이 생성된다.

식(4)의 해석을 위해 그림2를 살펴보자. 그림에서 전세금을 x라고 하면, 쇄선 $y=-x+V_0$는 전세를 안고 주택을 살 때 비용을 나타내고, 실선 $y=c(x)$는 임대인이 주택을 구매해서 나오는 미래 부의 현재가치

$$e^{-rT}E[\max(V_T-x,0)]$$

를 나타낸다. 이 그림에서 전세가격이 매매가격의 67.5%미만에서 형성이 된다면 임대인의 매입비용이 미래 부의 현재가치를 초과하기 때문에, 임대인에게 이 같은 낮은 비용에 거래할 유인이 없다. 마찬가지로, 전세가격이 67.5%초과인 구간에서 형성된다면 임차인에게 불리해지므로 전세금 B_0^J는 두 선이 교차하는 점에서 형성될 것이다. 이처럼 공정한 전세가격은 항상 존재하고 유일하다.

정리1. 식(4)를 만족시키는 전세가격은 유일하게 존재한다.

증명: 정리1을 포함한 모든 정리의 증명은 부록에 둔다.

정리1에 의해, 전세가격 B_0^J는 현 주택가격 V_0, 순간 임대료 비율 δ, 무위험이자율 r, 만기 T, 그리고 주택가치의 변동성 σ의 함수로 나타낼 수 있다. 이를 이용하여 전세가격의 성질을 정리2와 같이 찾을 수 있다.

정리2.

a) 전세금은 매매가격에 선형으로 증가한다. (전세가격/매매가격의 비율 B_0^J/V_0는 일정하다.)

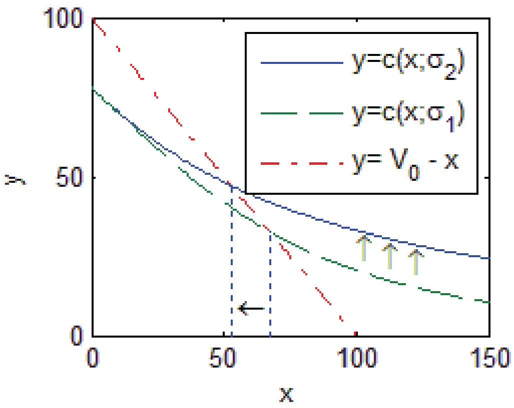
b) 매매가격 변동성이 커질수록 전세가격은 감소한다.

c) 임대료가 증가할수록 전세가격은 상승한다.

d) 무위험이자율이 증가할수록 전세가격은 감소한다.

정리2의 b) 및 d)는 Ambrose and Kim (2003)의 실증분석에 부합한다. 이제 정리2를 직관적으로 해석해보자. a)는 임대료 비율, 무위험이자율, 만기, 변동성등이 동일하다면 전세/매매가격 비율이 동일해야함을 나타내고 있다. 다시 말해 전세/매매가격 비율이 변화했다면 임대료율, 무위험이자율, 만기, 변동성등이 변화함에 의한 결과임을 나타내고 있다.

〈그림 3〉 변동성 변화에 따른
전세가격 변화 구조



주: 이 그림의 모수는 주택가격 $V_0=100$, 임대료 비율 $\delta=5\%$, 무위험 이자율 $r=5\%$, 전세 만기 $T=5$, 및 주택가격의 두 변동성 $\sigma_1=30\%$과, $\sigma_2=50\%$를 이용했다.

이제 변동성의 효과를 살펴보자. 매매가격의 변동성이 커지면, 세입자 입장에서는 매매가격이 전세가격이하로 하락하여 전세금의 일부를 돌려받지 못할 가능성이 높아지게 된다. b)는 그러한 성질이 반영되어 변동성이 심할수록 전세가격이 감소함을 보여준다. 자세한 내용은 증명에서 다루었지만, 그림3은 변동성이 바뀔 때 전세가격이 변화하는 원리를 보여준다. 이번에도 그림2와 마유사하게, 쇄선 $y=-x+V_0$는 전세를 안고 주택을 살 때 비용, 실선과 파선 $y=c(x;\sigma)$는 각각의 변동성에 대해 임대인이 주택을 구매해서 나오는 미래 부의 현재가치를 나타낸다. 변동성이 증가하면 가치가 증가하는 콜옵션의 성질에 따라, 변동성이 30%에서 50%로 증가했을 때 교점이 왼쪽으로 움직여 전세가격이 감소하는 모습을 확인할 수 있다.

최근 전세가격 상승을 논의한 안순권(2011) 및 임희정(2011)에서는 그 원인으로 주택가격의 하향 안정화를 지목하고 있다. 이때 주안점으로는 평균 상승률의 둔화에 초점을 두고 있는 것으로 보인다. 그러나 정리2.b)에 따르면, 그중에서도 안정화, 즉, 변동성의 둔화가 중요한 요인이 될 수 있다.

이제 임대료 및 무위험 이자율의 효과를 보자. 임대료의 증가는 기본적으로 세입자가 지출하는 금액이 커짐을 의미한다. 따라서 이는 전세가격의 상승을 유도한다. 무위험이자율의 증가는 미래에 받을 금액의 현재가치가 떨어짐을 의미한다. 즉, 이자율이 오르면 임차인이 초기에 지급하는 금액에 비해 미래에 받을 금액의 현재가치가 떨어지게 되고 이를 감안하면 전세가격이 감소해야한다. 이처럼 정리2의 명제들은 모두 직관에 부합함을 알 수 있다.

2. 근저당이 있을 때 전세가격

2절에서는 주택 담보대출이 있을 때 전세가격이 결정되는 구조에 대해 알아보고자 한다. 이때, 전세보다 후순위로 받은 대출은 전세가격에 영향을 미치지 않기 때문에, 전세보다 우선순위로 받은 대출을 고려하여 전세가격을 살펴보고자 한다. 편의상 대출의 만기는 전세 만기와 동일하고, 상환은 모두 만기에만 이루어진다고 가정하자.

먼저, 대출만 있을 때 주택 초기 구매 필요자금 및 주택 구매에 따른 현재가치의 관계를 살펴보자. 대출기관은 임대료에 대한 권리가 없다. 따라서 집주인은 초기에 ‘주택가격 - 대출금액’을 투자하여, 대출상환 차감액과 임대료를 갖게 된다. 따라서 대출 만기상환액을 L, 이에 대응하는 현재 대출금을 $B_0^S(L)$로 나타내고, t시점 순간임대료가 $\delta V_t dt$임을 이용하면 다음의 식이 성립한다.

$$V_0 - B_0^S(L) = e^{-rT}E[\max(V_T - L, 0)] + \int_0^T e^{-rt}E[\delta V_t]dt \quad (5)$$

좌변은 초기에 집을 구매하는데 드는 비용, 우변은 주택에서 나오는 미래 현금들의 현재가치 합이다. 식 (3b)를 이용하여 우변의 적분 꼴을 정리하면 위 식은,

$$V_0 - B_0^S(L) = e^{-rT}E[\max(V_T - L, 0)] + V_0(1 - e^{-\delta T}) \quad (6)$$

로 표현할 수 있다.

이제 추가로 전세계약이 이루어질 때 전세 가격에 대해 알아보자. 전세금을 $B_0^J(L)$라고 하면 대출 및 전세를 안고 주택을 사는 사람은 초기에

$$V_0 - B_0^S(L) - B_0^J(L) \quad (7)$$

의 비용을 지출한다. 그리고 계약기간동안 주택소유자는 임대 편의를 세입자에게 일임하므로 아무런 현금흐름을 가질 수 없다. 마지막으로, 만기가 되면, 주택 구매자는 대출원금과 전세금의 합계 $L + B_0^J(L)$를 상환 후 주택의 나머지 가치

$$\max(V_T - L - B_0^J(L), 0) \quad (8)$$

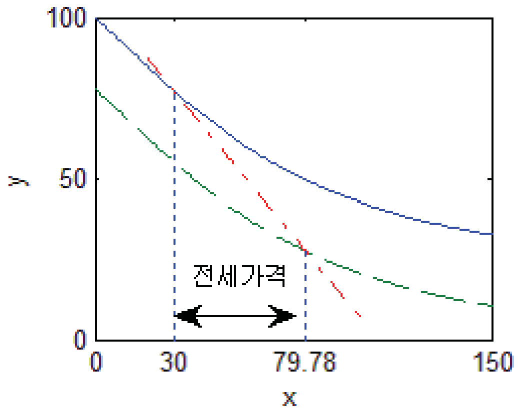
를 갖게 된다. 주택 구매자입장에서 초기비용과 미래에 획득할 자산의 현재가치는 서로 동일해야 하므로 다음이 성립한다.

$$V_0 - B_0^S(L) - B_0^J(L) = e^{-rT}E[\max(V_T - L - B_0^J(L), 0)] \quad (9)$$

앞서 근저당이 없을 때와 마찬가지로 전세가격은 유일하게 존재한다.

정리3. 식(9)를 만족시키는 전세가격 $B_0^J(L)$이 유일하게 존재한다.

〈그림 4〉 근저당 존재시 전세가격 결정구조



주: 이 그림의 모수로, 선순위 대출 만기상환액 L은 30으로 두었다. 다른 모수는 주택가격 $V_0 = 100$, 임대료 비율 $\delta = 5\%$, 무위험 이자율 $r = 5\%$, 전세 만기 $T = 5$, 주택가격 변동성 $\sigma = 30\%$를 이용했다.

정리3의 상세한 증명은 부록에 있지만, 그림4는 이를 구조적으로 보여준다. 먼저 실선은 식(6)의 우변, 즉, 대출상환액에 따른 주택소유자의 대출상환후 잔여금액의 현재가치를 의미하고, 파선은 전세 및 대출 총액에 따라 주택소유자가 전세만기에 얻게 될 자산의 현재가치를 나타낸다. 그리고 쇄선은 대출만기 상환액을 30으로 설정한 사람이, 대출만기상환액+전세금에 따라 초기에 지출해야하는 비용을 보여준다. 앞서 그림2에서 보았던 것처럼, 쇄선과 파선이 만나는 지점에서 전세금이 결정될 것이다. 그 결과 그림과 같이

전세금이 결정된다.

비록 여전히 음함수형태이긴 하지만, 식 (6)과 식 (9)를 조합하면, 전세가격 $B_0^J(L)$를 식 (10)으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} B_0^J(L) &= e^{-rT}E[\max(V_T - L, 0)] \\ &\quad - e^{-rT}E[\max(V_T - L - B_0^J(L), 0)] \\ &\quad + V_0(1 - e^{-\delta T}) \end{aligned} \tag{10}$$

그리고 전세가격이 만족해야할 식을 통해 다음과 같은 성질을 보일 수 있다.

정리4. 근저당이 있을 때 전세가격

a) (대출만기상환액+전세가격)/주택가격의 크기가 $e^{(r-\delta+0.5\sigma^2)T}$이하인 주택만 고려한다면, 변동성이 증가할수록 전세가격은 감소한다.

b) 임대료가 증가할수록 전세가격은 상승한다.

c) 임대료/주택가격 비율이 증가할수록 임대료/전세가격이 증가한다.

d) 무위험이자율이 증가할수록 전세가격은 감소한다.

e) 대출의 규모가 커질수록 전세가격은 감소한다.

정리2에서 살펴본 것처럼 b) 임대료가 높을수록 전세가격은 상승하고, d) 이자율이 증가할수록 전세가격은 하락한다. 그러나 정리 4는 몇 가지 다른 성질을 알려준다.

e)는 대출의 규모가 커질수록 전세가격은 하락하게 됨을 보여준다. 이는 근저당이 있는 집의 전세계약을 할 때는 주의해야한다는 거래 수칙에 부합한다.

a)의 경우, 대출규모가 크지 않은 경우에는 1절과 같이 변동성이 증가함에 따라 전세가격이 감소하지만, 대출규모가 큰 경우에는 오히려 변동성과 함께 전세가격이 증가할 수 있음을 간접적으로 시사한다. 실제로 특정 모수를 가정한 <표 1>에 의하면, 변동성이 10%에서 20%로 증가하는 구간에서 전세가격이 오히려 증가함을 보여준다. 이는, 주택가격에 비해 근저당의 크기가 극도로 높은 상황에서는 변동성이 낮으면 임차인이 전세금을 전혀 못 돌려받더라도, 변동성이 증가하면 조금이라도 전세금을 상환 받을 가능성이 생겨서 미래 상환 금액에 대한 현재가치를 늘려주기 때문이다.[3] 그럼에도 불구하고, 현실적으로 근저당 설정금액이 높은 집은 전세거래를 기피하므로, 이와 같은 상황을 배제할 수 있다는 점에서 전세가격이 변동성과 부의 관계를 가진다는 점은 여전히 유효하다고 보인다.

〈표 1〉 변동성에 따른 전세가격

변동성	10%	20%	30%	40%	50%
전세가격	27.7	29.0	28.8	28.2	27.5

주: 이 표는 변동성에 따른 전세가격을 나타낸다. 다른 모수들로는, 주택 매매가격 $V_0 = 100$, 임대료율 $\delta = 5\%$, 무위험이자율 $r = 5\%$, 전세만기 $T = 5$및 선순위대출 만기상환액 $L = 100$을 이용했다.

이제, b)와 c)의 임대료의 효과에 대해 살펴보

3) 표1의 그림4보다 많은 대출금을 가정하고, 나머지 모수는 동일하게 적용했다. 이들 모수에 대해, 식(3b)를 적용하면, 순수임대료의 가치는 22.1로 전세가격의 많은 부분을 차지하고 있다. 또한, 식(3a)에 의하면, 높은 임대료율은 만기 주택가격에 대한 현재가치가 낮음을 의미하고, 미래의 주택가격 역시 낮게 형성될 것을 암시한다.

자. b), c) 명제에서는 다른 변수는 고정한 채 임대료의 효과만을 보았기 때문에, '임대료'나 '임대료/주택가격'은 사실상 동일한 의미를 지닌다. 특히, 이 변수는 우리 모형에서 δ, 즉, 순간임대료 비율과 일맥상통하는데, 이는 감가상각비율로도 해석할 수 있다. 다시 말해서, 주택가격에 비해 임대료가 높다는 의미는, 가까운 미래에는 해당 주택에서 거주함에의해 얻는 편의(월세)가 높은 반면, 먼 미래에는 그 편의가 상대적으로 줄어듦에 의해 주택가격 상승률은 낮아진다고 이해할 수 있다. 결국 b)와 c)는, 임대료비율이 증가하는 경우 임대편의가 높아짐에 따라 전세금이 증가하긴 하지만, 미래 기대 매매가격 상승률의 하락으로 인해 전세금을 돌려받지 못할 가능성도 함께 증가하여, 전세금 증가율이 임대료의 상승률에 미치지 못함을 의미한다.

3. 근저당이 있을 때 임대료와 보증금액

앞선 절에서는 순수월세 및 전세가격의 관계를 살펴보았다. 마지막으로, 이들을 일반화하여, 세입자가 순수월세의 임대료 중에 α의 비율을 임대료로 낼 때 보증금을 살펴보자. 이때, $\alpha = 0$이면 전세, $\alpha = 1$이면 완전 월세, $0 < \alpha < 1$이면 보증부 월세로 해석할 수 있다.

이제, 보증금을 대출상환액과, 임차방식의 함수 $B_0^D(L,\alpha)$로 나타내자. 대출 및 보증금을 안고 주택을 사는 사람은 초기에

$$V_0 - B_0^S(L) - B_0^D(L,\alpha)$$

의 비용을 지출한다. 그리고 계약기간동안 주택소유자는 순수 임대료 $\delta V_t dt$에서 α의 비율인 $\alpha\delta V_t dt$를 갖게 된다. 마지막으로, 만기가 되면 주택 구매자는 대출만기상환금과 보증금의 합계 $L + B_0^D(L,\alpha)$를 상환 후 주택의 나머지 가치인

$$\max(V_T - L - B_0^D(L,\alpha), 0)$$

를 갖게 된다. 주택 구매자입장에서 초기비용과 미래에 획득할 자산의 현재가치는 서로 동일해야 하므로 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} & V_0 - B_0^S(L) - B_0^D(L,\alpha) \\ & \quad = e^{-rT} E[\max(V_T - L - B_0^D(L,\alpha), 0)] \\ & \quad + \alpha \int_0^T e^{-rt} E[\delta V_t] dt \end{aligned} \tag{11}$$

이제 식 (3b), 식 (5) 및 식 (11)을 이용하면 위 식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} & B_0^D(L,\alpha) = e^{-rT} E[\max(V_T - L, 0)] \\ & \quad - e^{-rT} E[\max(V_T - L - B_0^D(L,\alpha), 0)] \\ & \quad + (1-\alpha)(1 - e^{-\delta T}) V_0 \end{aligned} \tag{12}$$

정리5. 식(12)를 만족시키는 보증금액이 유일하게 존재한다.

앞선 1절과 2절에서는 전세일 때, 즉, $\alpha = 0$일 때 보증금이 유일하게 존재함을 보였다. 정리 5는 그와 유사하게, 임의의 $0 < \alpha < 1$에 대해 각각의 임대료 수준에 따른 보증금 역시 유일하게 존재함을 보여준다. 이때, 매월 지급해야하는 월세의 크기는 보증금이 많을수록 더 줄어들 것이다. 이에 따라, 보증금이 1단위 증가함에 따라

감면받을 수 있는 임대료의 크기를 한계임대료감면비율이라 칭하면, 다음 성질을 얻을 수 있다.

정리6. 보증금액이 증가하면 한계임대료감면비율도 증가한다.

보증금의 증가는 임차인이 미래에 보증금을 온전히 돌려받을 수 있는 확률을 감소하게 만든다. 임차인의 입장에서 이러한 상황을 고려한다면 임대료 감면비율은 보증금이 증가함에 따라 점점 증가해야할 것이다. 정리6은 이러한 직관에 부합한다. 또한 정리 6은 다음의 따름정리를 이끌어낸다.

따름정리. 보증금이 증가할수록 '임대료/(전세가격-보증금)'이 증가한다.

따름정리의 '임대료/(전세가격-보증금)'은 전월세전환률에 비례하는 수치이다. 따라서, 보증금과 전월세전환률이 정의 관계에 있음을 알 수 있다. 이는 보증금과 전월세전환률의 상관계수가 양수임을 보인 이재우 · 이창무(2005) 및 지규현 · 최창규(2010)의 실증분석에도 부합한다. 이재우 · 이창무(2005)는 이 같은 현상을 임대인의 레버리지 효과에 따른 위험프리미엄 증가에 의한 현상으로 해석한다. 그런데 따름정리가 정리6에서 도출된 것을 감안하면 임차인의 입장에서도 자연스러운 해석이 가능하다.

III. 결론

전통적으로 전세가격은 주로 수요 공급의 일치점으로 해석되다가 이창무 · 정의철 · 이현석(2002)이후 임대인의 레버리지효과와 위험에 대해 주목하기 시작했다. 그러나 상대적으로 임차인이 전세금을 돌려받지 못할 위험은 모형에서 크게 고려되지 않았다.

본 연구는 이와 같은 임차인의 위험도 함께 고려할 필요성이 있음을 인식하고 모든 투자자의 위험을 함께 살펴볼 수 있는 방안으로 옵션가치평가 방법을 제시했다. 전세 및 조건부 월세는 채권과 같은 성질을 가지고 있고, 이는 채권 가격 평가에 흔히 쓰이는 옵션가치평가 방법이 전세가격에 도입할 수 있음을 의미했다.

이와 같은 모형으로 도출된 결과는 근저당유무, 매매가 변동의 위험등이 전세가격에 영향을 미칠 수 있다는 점에서 전세 거래시에 주의할 점과 일맥상통했다. 또한 이자율 및 주택가격변동성이 전세가격과 부의 관계에 있고 전월세전환률이 보증금과 정의 관계에 있음을 보일 수 있었는데 이는 기존 실증분석결과에 부합한다.

그러나, 주택가격의 변동에 따른 전세가격 변화에 초첨을 두다보니, 본 연구에서는, 모형의 단순화를 위해 세금 및 경매시 자산가치 손실효과등이 생략되었다. 뿐만 아니라 임차인 보호법등, 전세가격에 영향을 미칠 수 있는 중요한 여러 요인들이 고려되지 않았다. 이는 본 연구의 한계이며 향후 연구를 기대한다.

논문접수일 : 2012년 4월 30일
논문심사일 : 2012년 5월 22일
게재확정일 : 2012년 8월 28일

참고문헌

1. 김선웅, "전세제도의 특성과 전세금의 유동화 방안", 「주택금융」 제 221권, 주택은행, 2000, pp. 69-89
2. 김종일 · 송의영 · 이우헌, “서울 아파트 시장에서의 전세-매매가격 비율과 시장의 효율성", 「한국경제의 분석」 제 4권 제1호, 금융연구원, 1998, pp. 50-107
3. 안순권, “전세시장 안정대책과 주택가격 규제 논란,” 「KERI Brief」 11-03, 한국경제연구원, 2011
4. 이재우 · 이창무, “상가시장의 임대계약 및 전월세전환율 특성: 서울 상가시장을 중심으로”, 「국토계획」 제40권 제1호 대한국토 · 도시계획학회, 2005, pp. 93-111
5. 이창무 · 정의철 · 이현석, “보증부월세시장의 구조적 해석,” 「국토계획」 제37권 제6호, 대한국토도시계획학회, 2002, pp. 87-97
6. 이창무 · 최소의 · 제민혜, "임차인 입장에서의 전월세전환율 분석," 「주택연구」 제18권 2호, 한국주택학회, 2010, pp. 163-182
7. 임재만, "서울시 아파트 임대차계약 구조에 대한 새로운 해석", 「국토연구」 제70권, 국토연구원, 2011, pp. 23-39
8. 임희정, “최근 전세 가격 상승 배경과 전망,” 「이슈리포트」 11-02, 현대경제연구원, 2011
9. 지규현 · 최창규, "아파트 임대시장의 전월세전환율에 내재된 위험 프리미엄에 대한 해석," 한국부동산분석학회 2010년 추계학술대회
10. 최창규, 지규현, “전세와 월세에 대한 구조적 해석”, 「국토계획」 제42권 제3호, 대한국토 · 도시계획학회, 2007, pp. 215-226
11. Ambrose, B., and S. Kim, "Modeling the Korean Chonsei lease contract," *Real Estate Economics*, Vol. 31, No. 1, 2003, pp. 53-74
12. Black, F., and Scholes, M., "The pricing of options and corporate liabilities," *Journal of Political Economy*, Vol. 81 No. 3, 1973 pp. 637–654
13. Hull, J., *Options, Futures, and Other Derivatives*, Pearson, 2011
14. Hwang, M., J. M. Quigley, and J. Y. Son, “The dividend pricing model: new evidence from the Korean housing market”, *Journal of Real Estate Finance and Economics*, Vol. 32 No.3, 2006, pp. 205-228
15. Merton R. C., "Theory of rational option pricing," *The Bell Journal of Economics and Management Science*, Vol. 4 No. 1, 1973, pp. 141-183

부록: 정리의 증명

보조정리:

식(2)와 같이, t시점 주택가격을 V_t, 임대료 비율을 δ, 주택가격 변동성을 σ라 하고, 경제내의 무위험 이자율 r이라고 하자. 만기 T시점에 대출상환금 x를 갚아야 한다면 만기에 대출상환금을 차감한 주택가격의 현재(0시점) 가치는 개별 투자자의 위험성향 및 주택 가격의 실제 평균 상승률과 상관없이

$$c = e^{-rT}E[\max(V_T - x, 0)] \tag{A1}$$

가 되고, 이를 정리하면 다음이 성립한다.

$$c = e^{-\delta T}V_0 N(d_1) - e^{-rT}xN(d_2) \tag{A2}$$

이때, $N(.)$은 표준 정규분포의 누적분포함수를 의미하며, d_1, d_2는 다음을 만족한다.

$$d_1 = \frac{\log(V_0/x) + (r - \delta + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \tag{A3.1}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}. \tag{A3.2}$$

또한, 변수 x에 대해 다음이 성립하고,

$$\frac{\partial c}{\partial x} = -e^{-rT}N(d_2) > -1,^{4)} \tag{A4}$$

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = e^{-rT}\frac{1}{x\sigma\sqrt{T}}n(d_2), \tag{A5}$$

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x \partial \delta} = e^{-rT}\frac{\sqrt{T}}{\sigma}n(d_2) \tag{A6}$$

그 밖의 변수에 대한 민감도는 다음과 같다.

$$\frac{\partial c}{\partial \sigma} = V_0 e^{-\delta T}n(d_1)\sqrt{T}, \tag{A7}$$

$$\frac{\partial c}{\partial \delta} = -V_0 Te^{-\delta T}N(d_1), \tag{A8}$$

$$\frac{\partial c}{\partial r} = xTe^{-rT}N(d_2), \tag{A9}$$

이때, $n(.)$은 표준정규분포의 확률밀도함수이다.

증명: Black and Sholes (1973) 및 Hull(2011) 참고.

앞으로 증명을 위해 위의 c, d_1 및 d_2값을 대출상환금 x에 대한 함수 $c(x)$, $d_1(x)$ 및 $d_2(x)$로 이용할 것이다. 내용에 따라 대출상환금 x 외에 다른 변수 v의 효과를 볼 필요가 있다면 $c(x;v)$와 같이 표기할 것이다.

정리1의 증명:

이는 정리3에서 L=0인 경우이므로 증명을 생략한다.

정리2의 증명:

a)는 자명하다.

b)의 증명을 위해 함수 $f(x;\sigma)$를 $f(x;\sigma) = c(x;\sigma) - (V_0 - x)$로 두자.

변동성이 σ_1일 때 전세금이 $B_{0,1}^J$이라면, 식(4)와 식 (A1)에 의해 $f(B_{0,1}^J;\sigma_1) = 0$을 만족한다. 또한, (A7)에서 알 수 있듯이 c의 함수값은 변동성에 대해 증가함수이다. 따라서, $\sigma_2 > \sigma_1$라고 할 때 $f(B_{0,1}^J;\sigma_2) > f(B_{0,1}^J;\sigma_1) = 0$ 가 성

4) 부등호는 음수가 아닌 무위험이자율과, 누적분포함수의 특성 0<N(.)<1에 따른다.

립한다. 그런데 (A4)에 의해, $f(x;\sigma_2)$는 x에 대한 증가함수이다. 따라서 $f(B^J_{0,2};\sigma_2)=0$을 만족하는 $B^J_{0,2}$는 $B^J_{0,2} < B^J_{0,1}$을 만족한다.

c)는 순간 임대료 비율 δ가 증가할수록 전세가격이 증가함을 보이는 것으로 충분하다. 따라서 c)는 식 (A8)의 $\frac{\partial c}{\partial \delta}=-V_0Te^{-\delta T}N(d_1)<0$ 를, d)는 식 (A9)의 $\frac{\partial c}{\partial r}=xTe^{-rT}N(d_2)>0$임을 이용하여 b)와 동일한 방법으로 보일 수 있다.

정리3의 증명:

$L+B^J_0(L)$를 x로 치환하면 식 (9)의 우변은 식(A1)의 $c(x)$으로 나타낼 수 있고 식 (9)의 좌변은 $V_0-B^S_0(L)+L-x$가 된다. 이는 식 (6)을 이용하여

$$-x+L+c(L)+V_0(1-e^{-\delta T})$$

로 바뀐다. 따라서 식 (9)는 그림 4에서 보이는 것처럼, 함수 $c(x)$와 기울기가 -1이고 $\left(L, c(L)+V_0(1-e^{-\delta T})\right)$ 를 지나는 직선의 교차점에서 전세가격이 결정됨을 의미한다. 즉, 이는 정의역 $x>L$에서

$$f(x)=c(x)-\left\{-x+L+c(L)+V_0(1-e^{-\delta T})\right\}$$
$$=x-L+c(x)-c(L)-V_0(1-e^{-\delta T})$$

로 정의한 함수에 대해, $f(x)=0$의 해를 찾는 것과 동등하게 바뀌게 된다. 그런데 (A4)에 의해 함수 f는

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x}=1-e^{-rT}N(d_2)>0$$

로 단조 증가하는 함수이다. 또한,

$$f(L)=-V_0(1-e^{-\delta T})<0,$$

와

$$\begin{aligned} &f(c(L)+V_0(1-e^{-\delta T})+L) \\ &\quad = c(c(L)+V_0(1-e^{-\delta T})+L) \\ &\quad > 0 \end{aligned}$$

이 성립하므로, 중간값정리에 의해 $f(x)=0$의 해가 유일하게 존재한다. 따라서 전세금 역시 유일하게 존재한다.

정리4의 증명:

a) 정의역 $x>L$에서 함수 $f(x;\sigma)$를

$$\begin{aligned} f(x;\sigma)&=c(x;\sigma)-c(L;\sigma) \\ &\quad -V_0(1-e^{-\delta T})+(x-L) \end{aligned}$$

로 두자. 변동성이 σ_1일 때의 전세가격이 $B^J_{0,1}$이라면, 정리3의 증명과정에 따라,

$$f(L+B^J_{0,1};\sigma_1)=0$$

을 만족한다. 또한, 식 (A7)에 의해, 함수 f의 변동성에 대한 편미분은 다음을 만족한다.[5]

5) 부등호는 다음과 같은 이유로 성립한다. 첫째, (대출만기상환액+전세가격)/주택가격이 $e^{(r-\delta+0.5\sigma^2)T}$이하라는 조건에 따라 $d_1(x)$ 및 $d_1(L)$이 모두 양수이다. 둘째, 함수 $n(.)$은 양의 구간에서 감소한다. 셋째,

$$\frac{\partial f(x,\sigma)}{\partial \sigma} = V_0 e^{-\delta T}\sqrt{T}\{n(d_1(x)) - n(d_1(L))\} > 0$$

따라서, $\sigma_2 > \sigma_1$라고 할 때,

$$f(L + B_{0,1}^J;\sigma_2) > f(L + B_{0,1}^J;\sigma_1) = 0$$

가 성립한다. $f(x;\sigma_2)$는 x에 대한 증가함수이므로 $f(L + B_{0,2}^J;\sigma_2) = 0$을 만족하는 $B_{0,2}^J$는 $B_{0,2}^J < B_{0,1}^J$을 만족한다.

b) 증명을 위해 순간 임대료 비율이 δ일 때, 함수 $f(x;\delta)$를

$$f(x;\delta) = c(x;\delta) - c(L;\delta) - V_0(1 - e^{-\delta T}) + (x - L)$$

로 두자. 순간임대료 비율이 δ_1일 때 전세 가격을 $B_{0,1}^J$라고 하면, $f(B_{0,1}^J + L;\delta_1) = 0$을 만족한다. 또한, 식 (A8)에 의해 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x;\delta)}{\partial \delta} &= -V_0 Te^{-\delta T}N(d_1(x)) \\ &\quad + V_0 Te^{-\delta T}N(d_1(L)) - V_0 Te^{-\delta T} \\ &= -V_0 Te^{-\delta T}(1 + N(d_1(x)) - N(d_1(L))) \\ &< 0\end{aligned}$$

따라서, $\delta_2 > \delta_1$이라고 할 때,

$$f(B_{0,1}^J + L;\delta_2) < f(B_{0,1}^J + L;\delta_1) = 0$$

가 성립한다. 그런데 $f(x;\delta)$는 x에 대해 증가함수이므로 $f(B_{0,2}^J + L;\delta_2) = 0$을 만족하는 $B_{0,2}^J$는 $B_{0,1}^J$ 보다 크다는 결론이 나온다.

c) $\delta_1 < \delta_2$일 때, 각각의 순간 임대료 비율에 따른 전세 가격을 $B_{0,1}^J(L), B_{0,2}^J(L)$로 두자. 식 (10) 및 식(A1)에 의해 각각의 $i \in \{1,2\}$에 대해

$$B_{0,i}^J(L) = c(L;\delta_i) - c(L + B_{0,i}^J(L);\delta_i) + V_0(1 - e^{-\delta_i T})$$

가 성립한다. 위 관계식 중에서

$$c(L;\delta_i) - c(L + B_{0,i}^J(L);\delta_i)$$

는

$$\int_0^{B_{0,i}^J(L)} - \frac{\partial c(L + j;\delta_i)}{\partial j} dj$$

로 표현할 수 있다. 따라서 각각의 순간임대료 비율에 대해 '1-임대료/전세가격'은 다음 관계를 만족한다.

$$\frac{B_{0,i}^J(L) - V_0(1 - e^{-\delta_i T})}{B_{0,i}^J(L)} = \frac{1}{B_{0,i}^J(L)}\int_0^{B_{0,i}^J(L)} - \frac{\partial c(L + j;\delta_i)}{\partial j} dj$$

그리고 $w = \frac{B_{0,1}^J(L)}{B_{0,2}^J(L)}$로 정의하면, 아래의 부등식에 의해 원래 명제가 성립하게 된다.

$x > L$이다.

$$\frac{B_{0,1}^{J}(L)-V_0(1-e^{-\delta_1 T})}{B_{0,1}^{J}(L)}$$
$$=\frac{1}{B_{0,1}^{J}(L)}\int_0^{B_{0,1}^{J}(L)}-\frac{\partial c(L+j;\delta_1)}{\partial j}dj$$
$$>\frac{1}{B_{0,1}^{J}(L)}\int_0^{B_{0,1}^{J}(L)}-\frac{\partial c(L+j;\delta_2)}{\partial j}dj$$
$$>w\frac{1}{B_{0,1}^{J}(L)}\int_0^{B_{0,1}^{J}(L)}-\frac{\partial c(L+j;\delta_2)}{\partial j}dj$$
$$+\frac{(1-w)}{B_{0,2}^{J}(L)-B_{0,1}^{J}(L)}\int_{B_{0,1}^{J}(L)}^{B_{0,2}^{J}(L)}-\frac{\partial c(L+j;\delta_2)}{\partial j}dj$$
$$=\frac{1}{B_{0,2}^{J}(L)}\int_0^{B_{0,2}^{J}(L)}-\frac{\partial c(L+j;\delta_2)}{\partial j}dj$$
$$=\frac{B_{0,2}^{J}(L)-V_0(1-e^{-\delta_2 T})}{B_{0,2}^{J}(L)}$$

이때, 첫 번째 부등식은 (A6)의

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x\partial\delta}=e^{-rT}\frac{\sqrt{T}}{\sigma}n(d_2)>0$$

에 의해, $-\dfrac{\partial c(L+j;\delta)}{\partial j}$가 δ에 대해 감소함수이므로 성립하고, 두 번째 부등식은 (A5)의

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}=e^{-rT}\frac{1}{x\sigma\sqrt{T}}n(d_2)>0$$

에 의해, $-\dfrac{\partial c(L+j;\delta)}{\partial j}$가 j에 대해 감소함수이고, 정리 4.b)에 의해 $0<w<1$이므로 성립한다.

d) 및 e)는 b)와 증명과정이 유사하므로 생략한다.

정리5의 증명:

원금의 크기가 L인 선순위 대출이 있을 때, 정의역 $x>L$에서 함수 $f(x)$를

$$f(x)=c(x)-c(L)+(x-L)$$
$$-(1-\alpha)V_0(1-e^{-\delta T})$$

로 두면 정리3의 증명과 유사하게 보일 수 있다.

정리6의 증명:

보조정리를 통해 식(12)는 다음과 같이 표현할 수 있다.[6]

$$B_0^D(\alpha)=c(L)-c(L+B_0^D(\alpha))$$
$$+(1-\alpha)(1-e^{-\delta T})V_0$$

이를 미분하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$dB_0^D(\alpha)=-c'(L+B_0^D(\alpha))dB_0^D(\alpha)$$
$$-(1-e^{-\delta T})V_0 d\alpha$$

또, α를 보증금 B_0^D의 역함수로 간주하면 위 식과 식 (A4)를 통해 다음을 이끌어낼 수 있다.

$$\frac{d\alpha}{dB_0^D}=-\frac{1+c'(L+B_0^D)}{(1-e^{-\delta T})V_0}$$

6) 보증금은 L의 함수이기도 하지만, 이 정리는 L에 대한 효과를 보는 것이 아니기에 보증금을 α만의 함수로 표현했다.

$$= \frac{e^{-rT}N(d_2(L+B_0^D))-1}{(1-e^{-\delta T})V_0}$$

이때 $N(.)$은 표준정규분포의 누적분포함수로 0과 1사이 값을 가지는 증가함수이고, $d_2(L+B_0^D)$는 B_0^D에 대한 감소함수이므로 $\frac{d\alpha}{dB_0^D}$는 음수인 동시에 B_0^D에 대한 감소함수이다. 그런데 임대료의 현재가치는 $\alpha(1-e^{-\delta T})V_0$이므로, 한계 임대료 감면비율은 아래의 관계에 의해 양수이고, B_0^D에 대한 증가함수이다.

$$-\frac{d\left(\alpha(1-e^{-\delta T})V_0\right)}{dB_0^D}=-(1-e^{-\delta T})V_0\frac{d\alpha}{dB_0^D}$$

따름정리의 증명:

α_1,α_2각각이 양수이고, $\alpha_1<\alpha_2$ 일 때 각각의 보증금을 $B_{0,1}^D$, $B_{0,2}^D$로 두자. 전세계약인 경우 보증금이 전세금 B_0^J가 되고, 임대료를 내지 않기 때문에 α값은 0임을 인지하자. 정리 6에 의하면, $B_{0,2}^D<B_{0,1}^D<B_0^J$가 성립한다. 따라서 $w=\frac{B_0^J-B_{0,1}^D}{B_0^J-B_{0,2}^D}$로 정의하면 w는 $0<w<1$을 만족한다. 또한, α를 보증금에 대한 함수로 간주하면, 다음의 관계가 성립한다.

$$\frac{\alpha_1}{B_0^J-B_{0,1}^D}=\frac{1}{B_0^J-B_{0,1}^D}\int_{B_{0,1}^D}^{B_0^J}-\frac{d\alpha}{dx}dx$$

$$>w\frac{1}{B_0^J-B_{0,1}^D}\int_{B_{0,1}^D}^{B_0^J}-\frac{d\alpha}{dx}dx$$

$$+(1-w)\frac{1}{B_{0,1}^D-B_{0,2}^D}\int_{B_{0,2}^D}^{B_{0,1}^D}-\frac{d\alpha}{dx}dx$$

$$=\frac{1}{B_0^J-B_{0,2}^D}\int_{B_{0,2}^D}^{B_0^J}-\frac{d\alpha}{dx}dx$$

$$=\frac{\alpha_2}{B_0^J-B_{0,2}^D}$$

위 관계식에서 부등호가 성립하는 이유는 $\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2}f(x)dx$꼴은 x_1~x_2구간에서 $f(x)$의 평균값을 의미한다는 점과, 정리6에 의해 $-\frac{d\alpha}{dB_0^D}$가 양수이며 B_0^D에 대해 증가함수라는 점, 그리고 $0<w<1$이 성립하기 때문이다.

그런데 $B_{0,i}^D(i\in\{1,2\})$에 대해 '임대료/(전세가격-보증금)'은 $\frac{\alpha_i V_0(1-e^{-\delta T})}{B_0^J-B_{0,i}^D}$로 나타낼 수 있다. 따라서 따름정리가 성립하게 된다.