

부동산개발 실물옵션에 대한 이론적 고찰*

A Theoretical Framework for Real Estate Development Options

유 승 동(You, Seungdong)**

< Abstract >

This paper provides an analytical framework for real options in real estate development. It has two contributions to the literature on real options in real estate development. First, the paper provides an extensive literature review on previous studies. The review contains both discrete and continuous models, providing insights on both domestic and foreign studies. Second, the paper has a new strategy for the derivation of the value of an option on real estate development. The options valuation in real estate development is expected to distinguished from the options valuation in traditional finance, as real estate developments have unique features that make investments in real estate different from those in corporate finance. The paper proposes an underlying asset process, which allows negative cash flows from a real estate development project.

주 제 어 : 부동산개발, 실물옵션, 연속시간

key word : Real estate development, Real options, Continuous time

* 본 연구는 2013학년도 상명대학교 교내연구비를 지원받아 수행하였습니다. 본 논문은 2013년 한국금융공학회 정기학술대회에서 발표되었으며, 저자는 부산대 김무성 교수님, 서울연구원 김진 박사님, 학술대회에서 토론을 해주신 동서대 김홍배 교수님, 그리고 투자론 II 세션 참가자들에게 진심으로 감사를 드립니다. 특히 저자는 익명의 심사자님들의 고견으로 본 논문이 발전할 수 있었음을 밝히고자 합니다.

** 상명대학교 금융경제학과 조교수, peteryou@smu.ac.kr

I. 서론

본 논문은 부동산개발에서 중요한 고려요소인 불확실성을 연구한다. 불확실성을 고려하는 경우 할인된 현금흐름에 근거하여 순 투자가치(net present value of investment)가 영(zero)을 기준으로 투자결정을 내리는 마샬(Marshall)형 의사결정법은 그 기반을 상실한다(조주현·박홍일, 2004). 순 투자가치가 양(positive)인 상황에서 투자결정을 내리는 실물옵션(real options)의 접근법이 요구되는 것이다.¹⁾

부동산분야에서 실물옵션 문헌의 국내 흐름은 불연속 혹은 이산(discrete)체계를 중심으로 이루어졌다(조주현·박홍일, 2004; 김중영·김영국, 2008; 전재범, 2009; 전재범·김성일, 2009; 박도영 외, 2010; 권태인 외, 2011; 김기현·이상영, 2012)²⁾. 이들은 만기가 사전에 결정되어 있는 유럽형(European) 옵션의 평가모형인 블랙숄즈(Black-Sholes) 모형에 기초하고 있는 것이다. 국내 연구는 대부분 이항트리(binominal tree)를 작성한다. 그러나 부동산 개발시점은 미래로 지연이 가능하다. 따라서 만기가 고정된 유럽형 옵션의 제약을 극복하기 위하여 작성된 이항트리 내에서 반복적으로 블랙숄즈 모형을 적용하여 실물옵션 가치를 분석한다. 부동산개발에서 벗어나 상업용저당대출(신승우, 2006), MBS(김근용·윤주현, 2001), 민자사업(전재범, 2009), 그리고 공공사업(전재범·김성일, 2009)에서도 실물옵션의 접근방식은 이항트리에 근거로 이루어지고 있다. 이항트리의

도움이 없는 연속시간체계에서 실물옵션에 대한 논의가 필요한 시점이다.

본 논문이 부동산 문헌에 대한 기여는 다음의 두 가지로 정리될 수 있다. 우선 부동산 개발과 관련된 실물옵션에 관한 광범위한 국내외 문헌을 조사한다. 이산체계와 연속(시간)체계로 기존문헌을 분류하여 분석을 진행한다. 두 번째로 ‘부동산 개발옵션’의 해를 이론적으로 도출하며, 이와 같은 방법은 부동산개발과 연관된 기존(해외)문헌에서 이용된 방법과 상이하다. Brajkovic and Pozar(2010)은 본 논문과 유사한 접근방식으로 전력사업의 투자전략을 제시하고 있다. 그러나 부동산 분야에서는 부동산의 내구성(durable)이 활발히 논의되고 있어 이를 고려하고 있는 본 논문은 기존문헌과는 구분된다. Capozza and Helsley(1990)와 다르게 균형조건을 이용한 개발전략을 제시하고 있다. 또한 금융전략을 연구하고 있는 You(2011; 그리고 2013)와 다르게 실물옵션에 대한 이론적 접근법을 상세하게 고찰한다. 이를 통하여 향후 연속시간 체계에서 실물옵션에 대한 연구가 증가할 것으로 기대한다.

본 논문은 산술 브라운 운동(arithmetic brownian motion)을 소개하고 이에 근거한 실물옵션의 가치를 논의한다. 재무 및 투자관련 문헌에서는 기하 브라운 운동(geometric brownian motion)에 근거하여 실물옵션 분석이 이루어지고 있으며(유승동·신승우, 2012) 주요 원인은 주식가격이 음(negative)의 값을 가질 수 없기 때문이다. 그러나 부동산개발에서는 현금흐름이 음의 값을 가질 수

1) 부동산개발에는 옵션가치 평가이론이 적용될 수 있다. 이것은 부동산개발은 불확실성하에서 이루어지며, 부동산개발을 위한 의사결정은 미래로 연기가 가능하고, 부동산 개발사업의 경우 초기에 대규모의 투자 비용이 들어가기 때문이다(Williams, 1991).

2) 본 논문에서 이산체계란 이항트리에 근거하여 옵션가치를 도출하는 경우를 지칭한다.

있다. 예를 들어 부동산 개발의 초기 단계에서 현금유입이 존재하지 않지만 공사 관련 비용을 투자하여야 하기 때문이다. 그리고 개발이후 안정화(stabilization)의 단계까지 운영비용이 임대료를 초과하여 현금흐름이 음의 값을 가질 수도 있다. 이는 부동산시장의 고유한 특징과 연관되어 있다고 볼 수 있다.

실물옵션의 평가방법은 크게 contingent claims 평가법과 dynamic programming 평가법이 존재하며 (Dixit and Pyndix, 1994), 산림산업에서 Insley and Wirjanto(2012)는 두 유형의 접근법을 비교·분석한다. 부동산개발 분야에서 본 논문은 contingent claims 접근법에 의한 실물옵션을 연구한다. 실물옵션의 기초자산은 산술브라운 운동, 기하브라운 운동, mean reverting 운동 등을 고려 (Dixit and Pyndix, 1994)할 수 있으며 Brajkovic and Pozar(2010)는 전력산업에 적합한 기초자산의 흐름은 산술브라운 운동이 아님을 지적한다. 산업특성에 적합한 실물옵션 모형과 그 평가는 각 분야에서 독특한 기여로 인정되고 있다. 그리고 실물옵션 연구는 자산가치, 옵션유형, 경제유인 등 모형의 차이에 따른 결과의 도출 및 해석 그리고 기술적 분석방법 등에 따라 독립적 연구가 될 수 있다. 부동산개발 실물옵션 이론에 대한 분석적 고찰은 향후 이론모형에 대한 인프라 구축에 기반이 될 수 있을 것으로 기대한다.

제2장에서 부동산개발과 관련된 광범위한 선행연구를 분석한다. 국내문헌의 경우 부동산개발 사업에서 이항트리에 근거한 실물옵션 가치분석이 이루어지고 있다. 이와 더불어 연속시간체계 하에서 부동산개발 옵션관련 문헌고찰이 포함되

어 있다. 제3장에서는 산술브라운 운동에 근거한 부동산개발 실물옵션 가치를 도출한다. 부동산개발 분야에 존재하는 기존문헌과 달리 전미분방정식(ordinary differential equation)에 근거하여 옵션방정식을 도출과정을 기술하고 있다. 마지막으로 제4장은 결론이다.

II. 선행연구

본 장에서는 부동산시장에서의 실물옵션과 관련된 기존문헌을 고찰한다. 부동산의 가치에 불확실성이 반영될 수 있다는 것을 Titman(1985)이 주장하면서, 부동산 분야에서 실물옵션이 주목을 받기 시작하였다.

국내 문헌의 시발점은 조주현·박홍일(2004)으로 볼 수 있을 것이다. 부동산시장에 실물옵션을 적용하기 위하여 이항트리를 작성하고 이산체계 하에서 옵션가치를 연구하는 문헌의 태동을 알렸다.³⁾ 김중영·김영국(2008)은 강남소재 오피스빌딩을 대상으로 부동산개발 사업에 적용 가능한 이항트리에 작성하였다. 완공시점에 기초자산의 가치와 개발에 따른 공사비를 고려하여 옵션가치를 도출하였다. 이들은 확장가치에 초점을 맞추고, 비교분석(comparative statics)을 통하여 개발 비용 증가에 따라 확장옵션 가치가 변화할 수 있음을 연구하였다. 박도영 외(2010)는 여의도 및 서울도심에 소재한 두 개의 개별 사업을 근거로 현금흐름 분석을 통한 옵션가치를 도출하였다.

권태인 외(2011)는 풋옵션에 근거하여 40층짜

3) 금융옵션과 실물옵션의 차이와 포기옵션, 연기옵션 그리고 확장옵션에 대한 논의를 진행하고 있으며, 특히 투자만기를 5년으로 가정으로 매년 1개의 노드(node)를 구성하여 옵션가치를 도출하였다.

리 사무실 건물의 포기옵션을 연구하였다. 포기 옵션이라고 함은 프로젝트 가격이 행사가격보다 낮은 경우 개발사업자가 사업을 포기하는 옵션을 의미한다.⁴⁾ 김기현·이상영(2012)은 복합단지개발 PF(project financing)사업의 축소 및 연기에 있어서 옵션가치를 도출하였고, 행사가격은 조주현·박홍일(2004)과 유사하게 사업가치가 기초자산의 30%가 되는 경우를 가정하였다.⁵⁾ 권태인 외(2011)는 포기옵션 이외에 사업의 축소 및 연기 옵션을 고려한 점에서 학문적 기여를 찾을 수 있을 것이다.

대규모 개발사업인 민자사업(전재범, 2009), 그리고 공공공사(전재범·김성일, 2009)에서 이산체계하의 실물옵션 접근법이 활발하게 이용되고 있다. 부동산개발 이외에 상업용저당대출(신승우, 2006), MBS(김근용·윤주현, 2001) 분야에서도 이항트리에 근거한 실물옵션의 평가가 광범위하게 활용되고 있다. 참고로 유승동·신승우(2012)는 연속시간 체계에서 공항건설에서도 실물옵션이 적용될 수 있음을 보였다.

연속시간 체계에서 실물옵션 분석은 이산체계와 마찬가지로 대부분 부동산개발사업의 사업위험(aggregate risks)이 외생적으로 주어졌다고 가정한다. 임대료의 변동위험에 근거한 실물옵션

가치산정이 이루어지는 것이다. 본 논문의 이론 모형에서도 임대료 변화에 근거한 부동산 개발업자의 사업전략을 실물옵션 이론을 통하여 제시하고 있다.⁶⁾

개발업자는 다양한 불확실성을 고려해야 하며 단일 불확실성에 근거하여 개발전략을 분석한다는 것은 엄격한 가정이라 생각할 수 있다. 개별 사업에서 두 가지 이상의 불확실성(실제로 수익 및 비용의 불확실성)을 고려하는 경우 더욱 세련된 모형을 제시할 수도 있다.⁷⁾ Clarke and Reed(1988)가 임대료 수익과 더불어 공사비의 불확실성을 고려하였다. 실물옵션의 가치를 폐쇄방정식을 통하여 도출하기 위하여, 수익과 비용의 최적 비율에 근거하여 개발전략을 제시하였다. Williams(1991)는 앞서 언급한 두 가지 유형의 불확실성에 기초하여 포기옵션(abandonment option)의 가치를 제시하며 동 분야에서 광범위하게 인용되기도 한다. 부동산개발과 관련하여 Titman and Torous(1989)는 상업용부동산 담보대출의 가격산정(pricing)에 있어 실물옵션의 접근 방식을 고려하기도 하였다.

비용의 불확실성을 배제하고 수익에서도 단일 불확실성 보다는 다수(2개 이상)의 불확실성이 존재할 수 있으며, 그 시발점은 Capozza and Li(1994)

4) 투자자의 행사가격은 기초자산의 40%를 회수할 수 있는 경우로 산정하였으며 투자안의 연간변동성을 14.80%로 고려하였다. 풋옵션에 근거한 오피스 개발의 포기옵션의 가치를 산정하였다는 점에서 기존 문헌과 상이한 접근방식을 취하였다. 향후 투자자가 포기옵션의 행사가격을 결정함에 있어서 기초자산의 잔존가격과 어떠한 관계를 맺고 있는지에 대한 진지한 논의가 진행될 것으로 기대해 본다.

5) 축소옵션의 경우 해당연도 투자액의 50%를 감액하는 경우를 상정하였으며, 연기옵션은 사업을 2년간 연기할 수 있는 경우를 고려하여 옵션가치를 산정한다.

6) 본 논문은 Brajkovic and Pozar(2010) 등과 다른 산업 즉 부동산 개발산업에서 실물옵션을 논의하고 있으며, 문헌조사에 따르면 현재까지 본 논문과 동일한 개발옵션 평가의 접근방법은 존재하지 않는다.

7) 다수의 불확실성을 고려하는 경우 경제적 분석을 곤란하게 하는 비용증가를 유발할 수 있다. 다수의 불확실성에 대한 논의는 You(2013)의 일부를 수정·보완하였다. 자세한 논의는 You(2013)를 참조할 수 있다.

로 개발업자가 두 단위(unit) 이상의 부동산으로부터 현금흐름을 창출한다는 논의를 진행하였다. 이들은 개발업자가 건설할 수 있는 최적 부동산의 크기(intensity)가 실물옵션 가치에 반영될 수 있다고 주장하였다. 예를 들어 단일 건물에 두 단위 이상의 임대 부동산을 건설하는 경우 그 임대 부동산으로부터의 현금흐름은 증가할 수 있으며, 이것이 옵션가치에 반영되어야 한다는 것이다. Capozza and Li(1994)의 경우 다수의 불확실성보다는 앞에서 언급한 사업의 총 위험에 근거한 옵션가치를 제시하였다. 개발사업에서 하나 이상의 독립된 공간을 건설한다는 가정으로 진일보한 모형을 제시하고 있으나, 동조적 생산함수(homothetic production function)을 이용하여 단순화하였다.⁸⁾

수익측면에서의 다수의 불확실성에 대한 고려는 Childs et al.(1996)과 Geltner et al.(1996)에서 보다 세련되게 논의되었다. Childs et al.(1996)는 사업자가 개발옵션 이외에 추가적으로 부동산 유형을 선택할 수 있는 옵션이 존재하는 경우를 논의하였다. 각 부동산의 현금흐름이 동일하지 않는 경우 여러 단위(논문에서는 두 단위)의 불확실한 현금흐름에 근거하여 옵션가치를 도출하였다. 예를 들어 Childs et al.(1996)은 개발업자가 아파트 혹은 상가를 결정하기 위한 부동산의 유형에 대한 선택옵션을 개발옵션 이외에 추가적으로 보유한 상황에서 옵션가치를 제시하였다. 개발옵션에 추가로 부동산 유형을 선택할 수 있는 옵션은 개발옵션의 가치를 증가시킨다. Geltner et al.(1996)의 경우 Childs et al.(1996)에서 개발전의 현금흐름과 개발 후의 현금흐름의 이질성을

고려하여 옵션을 연구하였다. 예를 들어 현재 단독주택을 미래의 아파트 혹은 상가로 재개발을 하는 경우, 우선 단독 주택과 아파트 혹은 상가의 현금흐름은 동일하지 않으며 아파트와 상가의 이질적인 현금흐름을 고려하여 옵션가치를 산정하였다. Geltner et al.(1996)에서 개발옵션의 경우 새로운 아파트와 상가의 최적 비율을 추가적으로 고려하여, Capozza and Li(1994)와 Childs et al.(1996)의 모형을 결합한 좀 더 진일보한 옵션 모형을 제시하고 있다는 평가를 받았다. 이와 같이 2개의 이상 즉 다수의 불확실성을 고려하는 경우 실물이론 모형과 마찬가지로 개발업자의 전략이 수리 해로 도출할 수밖에 없다는 한계가 존재한다. 그 외 부동산시장에서 개발업자가 이질적인 경우 혹은 토지소유주가 이질적인 경우를 고려하여 각각 Novy-Marx(2007)와 Guthrie(2010)이 실물옵션 가치를 제시하였다. You(2013)은 외생적으로 주어진 다수의 기초자산에 근거하여 실물옵션 가치를 도출하였다. 이는 대규모 부동산 개발 사업에서 다수의 이질적인 부동산으로부터 현금흐름이 창출되기 때문이다.

실물옵션 관련된 실증분석의 경우 향후 관심이 더욱 높아질 것으로 예상된다. Titman(1985) 이후 Quigg(1993)는 토지가격에 실물옵션 가치가 포함되어 있음을 보였다. Cunningham(2006)은 투자와 불확실성은 음의 관계를 지니고 있다는 즉 불확실성이 증가할수록 투자가 감소한다는 것을 실증적으로 보였다. 그리고 Cunningham(2007)은 도시의 성장조절(growth control)정책이 개발옵션의 행사를 늦춘다고 실증적으로 보였다. Bulan et al.(2009)은 분산할 수 없는 체계적 위험을 통해

8) 사실 여러 단위의 부동산을 개발하지만 개별 부동산으로부터의 현금흐름이 동일(homogeneous)하다는 가정과 부동산시장 현실간의 불일치를 확인할 수 있는 것이다.

하면서, 분산할 수 있는 비체계적 위험이 모두 실물옵션의 행사를 늦춘다는 실증결과를 보였다. 또한 이들은 개발시장의 경쟁증가에 따라 실물옵션의 가격이 하락할 수 있음을 실증적으로 밝혔다.

부동산 개발사업과 연관된 실증연구는 국내에서도 광범위하게 진행되고 있다. 이에 대한 걸림돌로 작용하고 있는 것은 연구자에게 미시자료에 대한 접근이 제한적으로 이루어지고 있다.⁹⁾ 또한 연구에 활용 가능한 자료를 위하여 정제작업(cleaning process)에 비용이 과다하게 소요되는 경우도 존재한다. 저자는 실물옵션에 대한 실증적 연구가 향후 광범위하게 진행될 것으로 기대한다.

III. 이론모형

본 논문은 연속시간 체계에서 부동산개발의 실물옵션을 분석하며, 기초자산의 흐름으로 산술브라운 운동을 고려한다. 산술브라운 운동을 이용하는 이유는 서론에서 기술한 것처럼 부동산(개발)분야에서 현금흐름은 음의 값을 지닐 수도 있기 때문이다.

본 장에서는 개발업자의 개발전략을 연구하며 개발전략은 사업이 완료되기 이전에 수립된다.¹⁰⁾ 이와 같은 전략을 연구함에 있어서 실물옵션의 전반적 흐름은 역진귀납법(backward induction)을 이용하는 것이다. 즉 부동산개발이 이후 부동산으로 부터의 순임대료의 흐름(net rent flows)이

$$dR = gdt + \sigma db \quad (1)$$

를 따른다고 가정한다. 식(1)은 산술브라운 운동으로 g 는 시간변화에 따른 순 현금흐름의 증가분이며, σ 는 표준편차이며, d 는 차분, t (양의)시간이다. b 는 표준 브라운운동으로 기댓값 $E(db) = 0$ 및 분산은 $Var(db) = E(db)^2 = dt$ 를 만족한다. 식(1)에서 g 와 σ 는 시간의 함수인 경우를 고려할 수도 있지만, 이를 고려하는 경우 분석비용 증가를 유발할 수 있으므로 시간불변을 가정하는 것이 일반적이다. 본 장에서는 Capozza and Schwann(1990), Capozza and Helsley(1990), Capozza and Sick(1994) 그리고 Dixit(1989)와 동일하게 하나의 불확실성 즉 b 를 이용하여 분석한다. 식(1)은 이산시간 체계 하에서 실물옵션 가치도출과 다른 가정이며 R 의 흐름은 순간적 변화에도 연속적이다. 연속시간 체계에서 식(1)를 현재 t 에서 무한대까지 적분하게 되면 부동산의 기댓값을 도출할 수 있다. 완전경쟁시장에서 부동산 기댓값은

$$P = E_t \left[\int_t^{\infty} R_s e^{-r(s-t)} ds \mid R \right] = \frac{1}{r} \left(R + \frac{g}{r} \right) \quad (2)$$

이며, 여기에서 r 은 무위험 이자율이다. 식(2)의 경우 부동산이 내구재(durable)란 가정이다. 재개발 혹은 재건축이 가능한 경우 식(2)는 재개발 옵션가치를 포함할 수 있다.¹¹⁾ 식(2)는 적분할 수 계산으로 증명이 가능하다. 개발업자 혹은 개

9) 실증분석과 관련 건설적 아이디어는 김진 박사님과 대화를 통해 찾을 수 있었다.

10) 본 장은 저자의 학위논문인 You(2012)의 문헌분석 부분에서 방법론을 상세하게 추가·보완하였음을 밝힌다.

11) 본 논문의 수식(3)에서 수식(10)은 전력산업을 연구하는 Brajkovic and Pozar(2010)과 해법과 적용이 상이

발에 이용되는 토지가 이질적이란 것은 Novy-Marx(2007)와 Guthrie(2010)이 각각 고려하고 있으며, 본 장에서는 개발업자와 토지가 동질적이란 가정을 이용한다.

개발전략을 연구할 준비가 되었으며, 개발시점 이전에 개발업자가 보유하고 있는 실물옵션의 가치를 구하기 위하여 개발업자의 목적함수를

$$W(R) = \sup_{\tau} E_t \left[\int_{\tau}^{\infty} R_s e^{-r(s-\tau)} ds - C e^{-r(\tau-t)} | R \right] \quad (3)$$

로 정의한다. 식(3)에서 개발업자의 목적함수는 개발시간 즉 τ 을 선택하는 것이며, $W(R)$ 은 개발업자가 보유하고 있는 실물옵션 가치를 의미한다. 개발업자는 최소상계 혹은 상한(supremum)을 도출하며, 시간흐름에서 집합의 안의 값을 반드시 가질 필요가 없기 때문이다. C 는 부동산개발비용이다. 식(3)에서 개발시점 이전 즉 τ 까지 현금흐름이 발생하지 않는다고 가정한다.

식(3)의 t 기의 기댓값 즉 E_t 안에 첫 번째 항은 개발이 완료된 τ 이후 부동산에서 생산하는 순 현금흐름의 현재가치이며, 개발비용은 개발시점에 지출이 된다. 현실적으로 부동산 사업은 순간적으로 완성될 수 없다. 개발기간(development lag)에 대한 논의는 Bar-Ilan and Strange(1996)에서 진행되었다. 식(3)을 풀기 위해 본 논문과 달리 Capozza and Helsley(1990)는 Karlin and Taylor(1975)의 해를 이용한다. 식(3)에서 옵션가치의 기댓값을 기초로 산출하며, 미래 실현된 임대료 수준은 식 (1)에 근거하여 음수가 될 수도 있다.

본 논문에서는 부동산 분야에서 기존문헌과 달리 전미분방정식의 일반해와 그 외 균형조건에 근거한 개발전략 해를 제시한다. 식(3)의 경우 그 구조형태(functional form)을 정의할 수 없으며, 이를 해결하기 위하여 동태모형에서 이토정리(Ito's Lemma)를 통한 근사치를 구하는 경우

$$W(R+dR) \cong W(R) + W'(R)dR + \frac{1}{2} W''(R)(dR)^2 + \dots \quad (4)$$

가 된다. 여기에서 $W'(R)$ 및 $W''(R)$ 는 일차 및 이차 편미분 값이다. 또한 식(1)의 기댓값을 취하는 경우

$$E(dR) = gdt \text{ 및 } E(dR)^2 = \sigma^2 dt \quad (5)$$

이다. 이는 연속시간에서 시간이 순간적으로 dt 만큼 변화하는 경우 이 보다 고차항의 변화는 고려대상이 되지 않을 정도로 작기 때문이다. 식(4)에서 평균과 분산에 근거한 분석을 위하여 2차 편미분항 보다 고차의 미분항을 고려하지 않는다. 식(4)에 기댓값을 취하여 식(1)을 고려하는 경우

$$W(R+dR) - W(R) = \left[gW'(R) + \frac{\sigma^2}{2} W''(R) \right] dt \quad (6)$$

를 얻는다. 기댓값을 취하는 것은 현재 t 시점에서 이용 가능한 모든 정보를 반영하여 예측한 미래 현금흐름의 기대 현재가치로 의사결정이 이루어

어지기 때문이다. 본 논문에서는 정보에 대한 왜곡이 존재하지 않으며 모든 개발업자가 미래에 대한 동일한 기대를 하고 있다. 부동산시장에서 시간의 순간적 변화에 따라 개발업자가 보유하고 있는 개발옵션 가치의 변화는 식(6)의 오른쪽항인 $gW'(R) + \frac{\sigma^2}{2}W''(R)$ 가 된다. 이를 통하여 자산 가치를 평균과 분산에 근거하여 정의할 수 있다.¹²⁾

부동산 시장에서 자산시장 접근법은 일반적으로 수용되고 있다(Poterba, 1984). 투자자는 새로운 대안에서 차익거래로 수익을 창출할 수 없다는 무차익거래조건(no-arbitrage condition)이 적용될 수 있는 것이다. 이는 식(6)의 왼쪽 항에서 자산가격 변동은 금융시장의 수익과 관계되었다. 즉 dt 로 표현되는 시간변화에 따라 $W(R)$ 은 $rW(R)dt$ 만큼 변화한다는 것이다. 자산시장과 금융시장의 균형조건은

$$\frac{\sigma^2}{2}W''(R) + gW'(R) - rW(R) = 0 \quad (7)$$

로, 이차선형(second-order linear) 전미분방정식이다. 식(7)의 일반해 $W(R) = W_1e^{\alpha R} + W_2e^{\beta R}$ (여기에서 $\alpha = (-g + \sqrt{g^2 + 2\sigma^2 r})/\sigma^2$ 그리고 $\beta = -(g + \sqrt{g^2 + 2\sigma^2 r})/\sigma^2$)이다. 폐쇄형 해의 도출과 해석을 위해 $\alpha > 0$ 와 $\beta < 0$ 이 중요한 역할을 한다. 전략도출을 위하여 일반 전미분방

정식과 해법도출과 유사한 방법으로 세 가지의 균형조건이 필요하다. 우선은 임대료가 하락하여 음의 값을 영구히 갖게 되는 경우 개발업자는 개발을 할 유인이 사라지게 된다. 임대료가 매우 낮은 경우 실물옵션의 가치가 사라지게 되는 것이다.

$$\lim_{R \rightarrow -\infty} W(R) = 0 \quad (8)$$

두 번째로 개발을 시작하는 시점을 R^* 즉 트리거 포인트(trigger point)로 지칭하는 경우¹³⁾

$$W(R^*) = \frac{1}{r}(R^* + \frac{g}{r}) - C \quad (9)$$

의 균형조건을 도출할 수 있다.

완전경쟁시장에서 개발업자가 개발을 시작함으로써 얻는 수익과 비용이 동일해야 한다. 식(9)의 오른쪽 항은 개발의 순수익 즉 개발을 함으로써 건물을 얻게 되며 개발시점에 개발비용을 지불하게 됨을 나타낸다. 동식의 왼쪽항의 경우 개발시작과 동시에 개발업자가 가지고 있는 실물옵션을 포기하는 비용을 지불한다.

마지막으로 개발하는 시점에서 개발을 통한 한계비용과 한계수익은 동일하다.

$$W'(R^*) = \frac{1}{r} \quad (10)$$

12) 식(4)-식(6)은 Dixit and Pyndix(1994)의 접근방식과 동일하지만, 제2장에서 언급한 문헌들에서는 그 논의가 함축적으로 진행되고 있다.

13) R 이 최초로 R^* 에 이르는 t 시점은 식(1)의 스타핑 타임(stopping time) τ 가 된다. 따라서 초기 조건 $R > -\frac{g}{r}$ 를 만족하여야 한다. 이를 지적해주신 익명의 심사자님께 감사드립니다.

식(10)을 Dixit and Pindyck은 수익과 비용이 굴절(kicked)되지 않은 즉 자연스럽게 접하는 smooth-pasting 조건이라고 정의한다. 기존문헌에서는 수익변화와 비용변화가 일치하는 점 등으로 해석하기도 한다. 직관적으로는 기다림의 한계수익과 한계비용이 일치하는 상황이 균형점이 되는 것이다.

폐쇄형 해석해를 도출하는 절차는 식(7)의 일 반해 $W(R) = W_1 e^{\alpha R} + W_2 e^{\beta R}$ 에서 식(8)을 이용하는 경우 $W(R) = W_1 e^{\alpha R}$ 이 된다. 그리고 식(9)와(10)을 이용하여

$$W(R) = \frac{1}{r} \left(R^* + \frac{g}{r} - rC \right) e^{-\alpha(R^* - R)} \quad (11)$$

그리고

$$R^* = rC - \frac{g}{r} + \frac{1}{\alpha} \quad (12)$$

를 도출할 수 있다. 식(11)과(12)를 이용하여 옵션가치

$$W(R) = \frac{1}{\alpha r} e^{-\alpha(R^* - R)} \quad (13)$$

를 도출할 수 있다. 식(13)에서 $R < R^*$ 의 구간에서 개발업자가 전략적 의사결정을 할 수 있는 기회가 주어졌다고 볼 수 있다. $R > R^*$ 의 구간에서 개발업자가 이미 합리적 의사결정에 도달하였거나, 개발업자가 의사결정의 기회를 이미 잃어 합리적 의사결정에 도달하지 못하였다고 볼 수 있다.

식(13)은 부동산개발 시작이전에 개발업자가 보유하고 있는 실물옵션 가치를 도출한다. 그리고 식(12)는 합리적 개발업자가 개발사업을 착공하는 트리거 포인트가 된다. 식(12)에서 트리거 포인트는 외생변수로 정의할 수 있으며 동시에 식(13)도 외생변수의 함수로 정의가 된다.

경제적 직관을 살펴보면 개발업자가 개발을 시작하는 트리거 포인트는 만일 개발을 통한 현금흐름이 증가하지 않는 $g = 0$ 경우 개발비용을 회복할 수 있는 시점 rC 에 불확실성이 더해진 $1/\alpha$ 의 현금흐름 수준에서 결정된다는 것이다. 불확실성이 존재하지 않는 $\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha} = 0$ 인 경우, 개발업자는 현금흐름 즉 순임대료가 rC 가 되는 현금흐름에서 사업을 시작하여 이를 마샬형 트리거 포인트라 할 수 있다. 불확실성이 존재하는 상황에서 현금흐름이 $1/\alpha > 0$ 만큼 늘어난 상황에서 트리거 포인트가 결정됨으로 사업이 지연된다. 불확실성이 존재하지 않으며 경제가 지속적으로 성장하는 $g > 0$ 인 경우, 부동산개발을 위한 트리거 포인트는 현금흐름의 증가 $\frac{g}{r}$ 를 반영하여 $R^* = rC - \frac{g}{r}$ 가 된다.

불확실이 증가하는 경우 부동산개발을 위한 트리거 포인트는 증가하게 된다. 이론모형에서 α 를 불확실성을 대표하는 변수인 σ 로 편미분하는 경우 $\frac{\partial \alpha}{\partial \sigma} < 0$ 가 된다. 따라서 식(12)에서 $\frac{\partial R^*}{\partial \sigma} > 0$ 가 된다; 불확실성이 증가하는 경우 개발업자의 투자시점 즉 개발시점을 지연되고 식(13)에서 실물옵션의 가치가 증가함은 확인가능하다. 개발비용 증가는 개발을 지연시킬 것이며, 식(12)

에서 $\frac{\partial R}{\partial C} = r > 0$ 로 확인할 수 있다.¹⁴⁾

IV. 결론

본 논문에서는 실물옵션과 연관된 부동산개발 관련 기존문헌을 체계적으로 분석·정리하였다. 그리고 이산모형에 근거하지 않고 연속시간 체계에서 실물옵션을 이론적으로 분석하였다. 일반 금융 분야와 다르게 부동산개발에서는 공사를 완료한 이후에도 사업가의 현금흐름에 순유출이 발생할 수 있어 산술브라운 운동에 근거한 실물옵션의 가치를 도출하였다. 본 논문은 Brajkovic and Pozar(2010) 등과 달리 부동산개발을 연구하고 있으며, 부동산 개발을 위한 실물옵션 도출방법은 기존 문헌과 구분된다.

본 논문은 부동산개발의 실물옵션과 연관된 연구 인프라의 기반을 제공하고자 하였다. 그러나 실물옵션과 연관된 일반문헌의 비판에서 본 논문이 자유롭지 못한 것도 사실이다. 실물옵션은 Fernandez(2001)의 지적처럼 일반적으로 기술적 복잡성으로 접근하기 용이하지 않고, 외생변수로 주어지는 불확실성을 포함한 각종 변수들에 대한 추정은 향후 계속적 연구가 필요한 분야이다.

논문접수일 : 2013년 5월 28일

논문심사일 : 2013년 6월 3일

게재확정일 : 2013년 7월 24일

참고문헌

1. 김근용·윤주현, “옵션이론을 이용한 MBS의 가치결정”, 「주택연구」 제9집 제2호, 한국주택학회, 2001, pp.161-184
2. 김기현·이상영, “공모형 PF사업 문제 유형화를 통한 실물옵션 가치평가법의 적용에 관한 연구”, 「부동산학연구」 제18집 제1호, 한국부동산분석학회, 2012, pp. 57-71
3. 김중영·김영국, “실물옵션모형을 활용한 부동산개발가치 평가”, 「감정평가학논집」 제7집 제2호, 한국감정평가학회, 2008, pp. 1~18
4. 권태인·이상호·김재준, “부동산개발사업에 지분투자 형태의 재무적투자자 유인을 위한 실물옵션 연구”, 「대한건축학회논문집」 제27집 제1호, 대한건축학회, 2011, pp. 165-172
5. 박도영·정성훈·손영진·김주형·김재준, “이항옵션을 활용한 부동산개발사업의 가치평가 및 투자시점에 관한 연구: 오피스 개발사례를 중심으로”, 「대한건축학회논문집」 제26집 제11호, 대한건축학회, 2010, pp. 107-115
6. 신승우, “상업저당대출의 가치에 영향을 미치는 요인에 관한 실증분석: 옵션이론을 중심으로”, 「주택연구」 제14집 제3호, 한국주택학회, 2006, pp. 79-102
7. 유승동·신승우, “불확실성을 고려한 항공산업의 투자결정”, 「한국항공경영학회지」 제10권 제2호, 한국항공경영학회, 2012, pp. 21~32
8. 전재범, “Appraisal of Revenue Cap Agreement

14) $\partial \alpha / \partial r > 0$ 이며 $\partial \alpha / \partial g < 0$ 임으로 식(12)에서 $\partial R^* / \partial r = C + g/r^2 - (1/\alpha^2)(\partial \alpha / \partial r)$ 와 $\partial R^* / \partial g = -1/r - (1/\alpha^2)(\partial \alpha / \partial g)$ 의 경우 수리분석에 근거하지 않는 한 그 방향성을 적절하게 해석하기 어렵다. 이는 옵션 가치와 개발가치가 모두 무위험이자율과 순 임대료 수준에 영향을 받으며 효과가 상반되기 때문이다.

- in BOT Project Finance,” 「국토연구」 제 63권, 국토연구원, 2009, pp 3-27
9. 전재범·김성일, “전략적 의사결정을 고려한 프로젝트 파이낸스 민자사업의 재무타당성 분석에 관한 연구”, 「국토연구」 제 61권, 국토연구원, 2009, pp 25-39
 10. 조주현·박홍일, "이항옵션모형을 이용한 부동산개발가치 평가에 관한 연구", 「부동산학 연구」, 제10집 제1호, 한국부동산분석학회, 2004, pp. 37-60
 11. Bar-ilan, A. and Strange, W.C., "Investment Lags," *American Economic Review* 86-3, 1996, pp. 610-622
 12. Brajkovic, J. and H. Pozar, "Real Options Approach to Investment in Base Load Coal Fired Plant", *2010 Real Options Conference Proceeding*, 2010
 13. Bulan, L., C. Mayer, and C. T. Somerville, "Irreversible investment, real options, and competition: Evidence from real estate development," *Journal of Urban Economics*, 65-3, 2009, pp. 237-251
 14. Capozza, D. and Y. Li, "The intensity and timing of investment: The case of land," *American Economic Review* 84-4, 1994, pp. 889-904
 15. Capozza, D. and G. Sick, "The risk structure of land markets," *Journal of Urban Economics*, 35-3, 1994, pp. 297-19
 16. Capozza, D. R. and R. W. Helsley. "The stochastic city," *Journal of Urban Economics* 28-2, 1990, pp. 187-203
 17. Capozza, D. R. and G. M. Schwann. "The value of risk in real estate markets," *Journal of Real Estate Finance and Economics*, 3-2, 1990, pp. 117-140
 18. Childs, P. D., T. J. Riddiough, and A. J. Triantis. "Mixed uses and the redevelopment option," *Real Estate Economics*, 24-3, 1996, pp. 317-339
 19. Clarke, H. R. and W. J. Reed. "A stochastic analysis of land development timing and property valuation," *Regional Science and Urban Economics*, 18-3, 1988, pp. 357-381
 20. Cunningham, C. R., "House price uncertainty, timing of development, and vacant land prices: Evidence for real options in seattle," *Journal of Urban Economics*, 59-1, 2006, pp. 1-31
 21. Cunningham, C. R., "Growth controls, real options, and land development," *Review of Economics and Statistics*, 89-2, 2007, pp. 343-358
 22. Dixit, A. K. "Entry and exit decisions under uncertainty," *Journal of Political Economy*, 97-3, 1989, pp. 620-38
 23. Dixit, A. K. and R. S. Pindyck. *Investment under Uncertainty*, Princeton University Press, 1994
 24. Fernandez, P. "Valuing Real options: Frequently Made Error," NBER working paper, 2001
 25. Geltner, D., T. Riddiough, and S. Stojanovic. "Insights on the effect of land use choice: The perpetual option on the best of two underlying assets," *Journal of Urban Economics*, 39-1, 1996, pp. 20-50

26. Guthrie, G. "House prices, development costs, and the value of waiting," *Journal of Urban Economics* 68-1, 2010, pp. 56-71
27. Insley, M.C. and T.S. Wirjanto, "Contrasting two approaches in real options valuation: contingent claims versus dynamic programming," *Journal of Forest Economics*, 16-2, 2012, pp. 157 -176
28. Karlin, S. and H. Taylor, *A First Course in Stochastic Processes*, Academic Press: New York, 1975
29. Novy-Marx, R. "An equilibrium model of investment under uncertainty," *Review of Financial Studies*, 20-5, 2007, pp. 1461-1502
30. Poterba, J. M. "Tax Subsidies to Owner-Occupied Housing: An Asset-Market Approach," *Quarterly Journal of Economics*, 99-4. 1984, pp. 729-752
31. Quigg, L, Empirical Testing of Real Option-Pricing Model, *Journal of Finance*, 1993, pp. 621-640
32. Titman, S. D. "Urban land prices under uncertainty," *American Economic Review*, 75, 1985, pp. 505-514
33. Titman, S. D. and W. N. Torous, "Valuing commercial mortgages: An empirical investigation of the contingent-claims approach to pricing risky debt," *Journal of Finance*, 44-2, 1989, pp. 345-73
34. Williams, J. "Real Estate Development as an Option," *Journal of Real Estate Finance and Economics*, 4-91, 1991, pp. 191-208.
35. You, S. D. "Leveraged City", Mimeo. 2011.
36. You, S. D. "An Investment Option with Multiple Assets, Allied Korea Finance Association Conference, 2013
37. You, S. D. *Essays on Real Estate Finance and Economics: Strategies for Developments under Uncertainty*, Doctorial Dissertation, University of British Columbia. 2012